TAUPE 50 par Yves Moreau

Solutions des exercices pages 28-29

Tangente Sup n° 21 Octobre 2003

1

Soit $f \in E_{\alpha,\beta}$. L'inégalité de Schwarz donne :

$$\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t,\text{ ou encore } I(f) \geqslant (\beta-\alpha)^2.$$

Donc $\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} I(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (\beta-\alpha)x + \alpha$

$$g \in E_{\alpha,\beta} \text{ et } I(g) = \int_0^1 (\beta-\alpha)^2 \mathrm{d}t = (\beta-\alpha)^2.$$

Ainsi $\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} I(f) = (\beta-\alpha)^2$.

2

On a : $\forall x \in [a,b]\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant m$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant M$.

Donc $\forall x \in [a,b]\ (f(x) - mg(x))(f(x) - Mg(x)) \leqslant 0$ ou
$\forall x \in [a,b]\ f^2(x) + mMg^2(x) \leqslant (m+M)f(x)g(x)$.
On intègre :

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + mM\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (M+m)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les intégrales sont notées I, J, K.
$I + mM\,J \leqslant (M+m)\,K$, donc $(I - mM\,J)^2 + 4mM\,IJ \leqslant (M+m)^2\,K^2$
donc $4mM\,IJ \leqslant (M+m)^2\,K^2$ ou

$$IJ \leqslant \frac{(M+m)^2}{4mM}K^2.$$

3

$f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

- $\beta < 0$:
  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$ donc $I(\alpha,\beta)$ existe si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\beta = 0$:
  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^\alpha}$ donc $I(\alpha,\beta)$ existe si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\beta > 0$:
  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha+\beta}}$ donc $I(\alpha,\beta)$ existe si et seulement si $\alpha+\beta > 1$.

Ceci assure que si $\alpha = 1$, $I(1,\beta)$ existe si et seulement si $\beta > 0$.

$$\forall \beta > 0,\ I(1,\beta) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x = \left(\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}\right) \times \frac{1}{\beta}.$$

$$\forall \beta > 0,\ I(1,\beta) = \frac{1}{\beta}\left[\ln\frac{1}{1+u}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln 2}{\beta}.$$

4

$t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$.

$\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{t-1}{\ln t} = 0$; $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{t-1}{\ln t} = 1$. Ainsi I existe.

On travaille avec x dans $[0, 1[$.

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

On change de variable ($u = t^2$) dans la première intrégrale de droite :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} t\frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t.$$

D'après la formule de la moyenne, il vient :

$$\exists\, \theta_x \in \,]x^2, x[\ \mathrm{F}(x) = \theta_x \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \theta_x (\ln|\ln x^2| - \ln|\ln x|).$$

Quand $\underset{x<1}{x \to 1}$, $\theta_x \to 1$ (encadrement).

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \mathrm{F}(x) = \ln 2$ donc $\mathrm{I} = \ln 2$.

5

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f(n) = \dfrac{\sqrt{n!}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \sqrt{i})}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\!-\!\{1\}\ f(n-1) - f(n) = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (1 + \sqrt{i})} \quad \frac{\sqrt{n!}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \sqrt{i})}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*\!-\!\{1\}\ f(n-1) - f(n) = \frac{\sqrt{(n-1)!}\,(1 + \sqrt{n} - \sqrt{n})}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + \sqrt{i})} = u_n.$$

Ainsi la nature de la série de terme général u_n est celle de la suite $(f(n))_{\mathbb{N}^*}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ -\ln(f(n)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

La série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge car $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; étant à termes positifs,

il vient : $\lim\limits_{n \to +\infty} -\ln(f(n)) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - f(n)$.

Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

6

Grâce aux croissances comparées, si $x \in [0, 1[$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(1) = 0$, on a convergence simple de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ vers $f : \begin{array}{l}[0, 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0\end{array}$

L'étude des variations de f_n sur $[0, 1]$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} = e^{-(n+1)\ln(1+1/n)}.$$

Cette quantité tendant vers $e^{-1} \neq 0$, la convergence uniforme est infirmée.

7

On considère la série entière de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [-1, 1]$ $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^3}$.

Il y a aussi convergence normale, donc uniforme sur $[-1, 1]$.
On déduit que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est continue sur $[-1, 1]$.
Vient alors : $f(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$.

$$\forall x \in [0, 1[\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right) x^{2n+2}$$

$$\text{donc } \forall x \in [0, 1[\ f(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ainsi $\forall x \in [0, 1[$ $f(x) = -x^2 \ln(1 - x^2) + (-x^2 - \ln(1 - x^2)) - 4x\,(\mathrm{Argth}\, x - x)$.
$\forall x \in [0, 1[$ $f(x) = -(1 + 2x + x^2)\ln(1 + x) - (1 - 2x + x^2)\ln(1 - x) + 3x^2$.
On obtient aisément $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 3 - 4\ln 2$.

$S = 3 - 4\ln 2$.

8

D'après l'égalité de Bezout (condition nécessaire) : $\exists\, (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ $AU + BV = 1$.
$AU + BV = 1$ s'écrit $AU + (S - A)V = 1$ ou $(S - B)U + BV = 1$.
Ainsi $(U - V)A = 1 - VS$ et $(V - U)B = 1 - US$.
On multiplie membre à membre $-(U - V)^2P = 1 - (U + V - UVS)S$
ou $(U + V - UVS)S + (-(U - V)^2)P = 1$.
On termine avec l'égalité de Bezout (condition suffisante).
S et P sont premiers entre eux.

9

On considère $\varphi = f_{|E'}$. Le théorème de rang donne : $\dim E' = \dim \mathrm{Ker}\, \varphi + \dim \mathrm{Im}\, \varphi$ ou $\dim E' = \dim (\mathrm{Ker}\, f \cap E') + \dim f(E')$.
Or $\dim (\mathrm{Ker}\, f + E') = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim E' - \dim (\mathrm{Ker}\, f \cap E')$,
donc $\dim E' = -\dim (\mathrm{Ker}\, f + E') + \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim E' + \dim f(E')$
ou $\dim f(E') + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim (\mathrm{Ker}\, f + E')$.

10

Les colonnes du déterminant sont C_1, C_2 et C_3. On a $\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2 + C_1, C_3)$.
Avec $\forall u \in \mathbb{R}\ \cos u = 2\cos^2 \dfrac{u}{2} - 1$, on a :

$$\det(C_1, C_2, C_3) = 2 \begin{vmatrix} 1 & \cos^2\alpha_1/2 & \tan \alpha_1/2 \\ 1 & \cos^2\alpha_2/2 & \tan \alpha_2/2 \\ 1 & \cos^2\alpha_3/2 & \tan \alpha_3/2 \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la seconde colonne à la première, on a :

$$\det(C_1, C_2, C_3) = 2 \begin{vmatrix} \sin^2\alpha_1/2 & \cos^2\alpha_1/2 & \tan \alpha_1/2 \\ \sin^2\alpha_2/2 & \cos^2\alpha_2/2 & \tan \alpha_2/2 \\ \sin^2\alpha_3/2 & \cos^2\alpha_3/2 & \tan \alpha_3/2 \end{vmatrix}.$$

Le développement suivant la dernière colonne donne pour premier terme :
$2\tan \alpha_1/2\ (\sin^2\alpha_2/2 \cos^2\alpha_3/2 - \cos^2\alpha_2/2 \sin^2\alpha_3/2)$, soit

$$2\tan \frac{\alpha_1}{2}\left(\sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\right) = 2\tan \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi)$$

ou enfin $2\sin \dfrac{\alpha_1}{2} \sin \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} = 2\sin \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} \cos \dfrac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_3$.

Le déterminant vaut : $\sin \alpha_2 - \sin \alpha_3 - (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_3) + \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2$, à savoir 0.

11

Trivialement si $E' \subset E''$ ou $E'' \subset E'$ alors $E' \cup E''$ est un sous-espace vectoriel de E.
Regardons si la condition est nécessaire en montrant que ($E' \not\subset E''$ et $E'' \not\subset E'$) conduit à une absurdité.
On aurait : ($\exists\ a \in E'$ et $a \notin E''$) et ($\exists\ b \in E''$ et $b \notin E'$), $a \in E' \cup E''$, $b \in E' \cup E''$ donc (structure d'ev) $a + b \in E' \cup E''$.
Si $a + b \in E'$ alors $\exists\ c \in E'\ a + b = c$ donc $b = c - a \in E'$, ce qui est absurde ;
le cas $a + b \in E''$ se traite de la même manière.

12

Soit $(\xi) : (z - 1)^n = -(z + 1)^n$.
Clairement 1 n'est pas solution.

$$(\xi) \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \left(\dfrac{z+1}{z+1}\right)^n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \exists\ k \in \{0, \dots\ n-1\}\ \dfrac{z+1}{z+1} = e^{i(\pi/n + 2k\pi/n)} \end{cases}$$

$$(\xi) \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \exists\ k \in \{0, \dots\ n-1\}\ z(1 - e^{i(\pi/n + 2k\pi/n)}) = -(1 + e^{i(\pi/n + 2k\pi/n)}). \end{cases}$$

On vérifie que $e^{i(\pi/n + 2k\pi/n)} \neq -1$.

Ainsi $(\xi) \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \exists\ k \in \{0, \dots\ n-1\}\ z = -\dfrac{1 + e^{i(\pi/n + 2k\pi/n)}}{1 - e^{i(\pi/n + 2k\pi/n)}}. \end{cases}$

Sachant que $\forall \theta \in \mathbb{R}\ 1 + e^{i\theta} = 2\cos \dfrac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \dfrac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$, il vient :

$$\mathcal{S}_{(\xi)} = \left\{-i \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n)}\right) \Big/ k \in \{0, \dots\ n-1\}\right\}.$$

13 On pose $U = (u_1, \dots, u_n)$. On a $A = {}^tUU$. Ainsi $A^2 = {}^tUU\,{}^tUU = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) {}^tUU = {}^tUU = A$.

De plus $(2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I$. Donc $(2A - I)^2 = I$, donc $S^2 = I$.
S comme A étant symétrique, $S\,{}^tS = I$ donc S est orthogonale.

14 On note A′ le pied de la hauteur issue de A. On a $\tan \widehat{B} = \dfrac{AA'}{BA'}$; $\tan \widehat{C} = \dfrac{AA'}{CA'}$ donc

$BA' \times \tan \widehat{B} = CA' \times \tan \widehat{C}$.
Comme A′ appartient à [B, C], on a : $\tan \widehat{B} \cdot \overrightarrow{BA'} + \tan \widehat{C} \cdot \overrightarrow{CA'} = \vec{0}$.
Ainsi $A' = \text{bar}\,((B, \tan \widehat{B}); (C, \tan \widehat{C}))$.
On obtient de même $B' = \text{bar}\,((A, \tan \widehat{A}); (C, \tan \widehat{C}))$ et $C' = \text{bar}\,((A, \tan \widehat{A}); (B, \tan \widehat{B}))$ en notant B′ et C′ les hauteurs des pieds des hauteurs de B et C.
Soit $H' = \text{bar}\,((A, \tan \widehat{A}); (B, \tan \widehat{B}); (C, \tan \widehat{C}))$. L'associativité du barycentre donne $H' = \text{bar}\,((A, \tan \widehat{A}); (A', \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C}))$ et donc H′ appartient à (AA′); de même H′ appartient à (BB′) et (CC′).
$H' = H$, CQFD.