énoncé 3

A toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante d'entiers supérieurs ou égaux à 2 on associe un réel, la somme de la série $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$v_0 = \dfrac{1}{u_0}$ et pour tout n ≥ 1, $v_n = \dfrac{v_{n-1}}{u_n}$.

Par exemple, à la suite (3, 4, 8, 8, 8, …)
($u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et $u_n = 8$ pour tout n ≥ 2) on associe :

$x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{96} + \dfrac{1}{96\times 8} + \dfrac{1}{96\times 8^2} + \ldots = -$.

Soit f la fonction qui, au réel x associé à la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$,
fait correspondre le réel y = f (x) associé à la suite $(1 + u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Par exemple, $f\left(\dfrac{3}{7}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{180} + \dfrac{1}{180\times 9} + \dfrac{1}{180\times 9^2} + \ldots = \dfrac{49}{160}$

associé à la suite (4, 5, 9, 9, 9, …)

Montrer que la fonction f admet
un point anguleux en tout nombre rationnel.

Solution

Tout d'abord, comme $v_n = \dfrac{1}{u_0u_1\ldots u_n} \leq \left(\dfrac{1}{u_0}\right)^{n+1}$, la série (v_n) converge bien vers x vérifiant : $\dfrac{1}{u_0} < x \leq \dfrac{1}{u_0 - 1}$. Pour construire (u_n) connaissant x, donc $u_0 = \left[\dfrac{1}{x}\right] + 1$ et $v_0 = \dfrac{1}{u_0}$, on utilise la suite (x_n) définie par les relations de récurrence : $x_n = x_{n-1} - v_{n-1}$, $u_n = \left[\dfrac{x_{n-1}}{x_n}\right]$ et bien sûr $v_n = \dfrac{v_{n-1}}{u_n}$. On a bien pour tout n : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n + x_{n+1} = x$, mais encore faut-il prouver que x_n est toujours positif et tend vers 0, et que la suite (u_n) est croissante. Or

$u_n = \left[\frac{x_{n-1}}{x_n}\right]$ peut s'écrire : $\frac{v_{n-1}}{v_n} \leq \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{v_{n-1}}{v_n} + 1$. L'inégalité de droite donne : $v_n(x_{n-1} - x_n) < x_n v_{n-1}$, d'où : $x_{n+1} = x_n - v_n > 0$, et celle de gauche : $v_{n-1}x_n - v_{n-1}v_n \leq x_{n-1}v_n - v_{n-1}v_n$, soit : $u_{n+1} = \left[\frac{x_n}{x_{n+1}}\right] \geq \left[\frac{v_{n-1}}{v_n}\right] = u_n$. En outre, on prouve par récurrence que : $\frac{v_{n-1}}{u_n} < x_n \leq \frac{v_{n-1}}{u_n - 1}$, donc d'une part x_n tend vers zéro, d'autre part, si les suites (u_n) et (u'_n) diffèrent au rang q avec $u_q > u'_q$, alors $x \leq v_0 + \ldots + v_{q-1} + \frac{v_{q-1}}{u_q - 1} \leq v'_0 + \ldots + v'_{q-1} + \frac{v'_{q-1}}{u'_q} < x'$: si l'on ordonne les suites (u_n) par l'ordre alphabétique, l'application qui à x associe (u_n) est strictement décroissante, et la fonction f, bijective de]0, 1] dans]0, $\frac{1}{2}$], est strictement croissante donc continue.

Si x est rationnel, tous les x_n sont rationnels et : $1 < \frac{x_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n - 1}$ prouve que le dénominateur de $\frac{x_n}{v_n}$ est au moins égal à $u_n - 1$. Mais comme $\frac{x_n}{v_n} = u_n\left(\frac{x_{n-1}}{v_{n-1}} - 1\right)$, ce dénominateur ne peut que décroître : (u_n), croissante et bornée, est donc constante à partir d'un certain rang. Réciproquement, si (u_n) est constante à partir du rang p, pour tout $n \geq p$, $x_n = \frac{v_{n-1}}{u_p - 1}$, donc x est rationnel. L'image $y = f(x)$ d'un rationnel est donc un rationnel. En outre, si (u_n) associée à x est constante à partir du rang p, pour tout $k \geq u_p - 2$, la suite associée à $x' = x + \frac{x_p}{k}$ est : $(u_0, \ldots u_{p-1}, u_p - 1, k+1, k+1, \ldots)$, car $x'_p = v'_p + \frac{v'_p}{k}$ et $v'_p = x_p$. On en déduit que $f\left(x + \frac{x_p}{k}\right) = y + \frac{y_p}{1+k}$: comme f est croissante, f est dérivable à droite avec $f'(x_+) = \frac{y_p}{x_p} > 0$. A gauche, pour tout $i \geq 1$, la suite : $u''_n = u_n$ si $n < p + i$, $u''_n = u_n + 1$ si $n \geq p + i$ est associée à $x'' = x - \frac{x_p}{u_p^{i+1}}$, car $x_{p+i} - x''_{p+i} = \frac{v_{p+i-1}}{u_p - 1} - \frac{v''_{p+i-1}}{u''_p}$, avec $v_{p+i-1} = \frac{v_{p-1}}{u_p^{i}}$. Il en résulte que $f\left(x-\frac{x_p}{u_p^{\,i+1}}\right)=y-\frac{y_p}{(1+u_p)^{i+1}}$: f admet une dérivée à gauche nulle, donc un point anguleux en tout rationnel.