

Des inverses à la pelle !

a) La série harmonique (série de terme général $1/n$ où $n > 0$) est une série divergente. On le démontre facilement en utilisant le fait que la somme des inverses des nombres de $n + 1$ à $2n$ est toujours strictement supérieure à $1/2$.

b) Aussi surprenant que cela puisse paraître, si l'on enlève de la série harmonique tous les termes qui utilisent le chiffre « 7 » dans l'écriture décimale de leur dénominateur (non simplifié), la série devient convergente. Voici une idée de la démonstration. Les nombres qui s'écrivent, en base dix, avec n

chiffres autres que le chiffre « 7 », et dont le premier chiffre est non nul, sont au nombre de $(9)n - (9)n - 1$, soit $8 \times 9n - 1$. L'inverse de chacun de ces nombres à n chiffres est compris entre $1/(10)n$ et $1/(10)n - 1$. La somme de tous ces nombres à n chiffres est donc comprise entre $(8/10) (9/10)n$ et $8 \times (9/10)n$. En sommant sur n et en faisant tendre n vers l'infini, on arrive à un encadrement compris entre 8 et 8×10 . Il en résulte que la somme de la série obtenue est inférieure à 80 et que Magali ne pourra jamais atteindre une somme égale à 100.

Trois chiffres suffisent-ils toujours ?

L'expression $-\log_2 [\log_2 (\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}})]$ où figurent n radicaux superposés ($n > 0$) est toujours égale au nombre n lui-même.

On peut procéder de même avec l'expression $-\log_4 [\log_4 (\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}})]$ dans laquelle le nombre de radicaux superposés est égal à $2n$.

On a enfin $n = -\log_8 [\log_8 (\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{8}}})]$ le nombre de radicaux étant cette fois égal à $3n$.

Nous lançons un appel aux lecteurs pour des formules utilisant trois mêmes chiffres de l'ensemble $\{0; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$ (le problème est ouvert).

La ténacité finit toujours par payer !

Le problème se ramène à déterminer si une des sommes partielles de la série :

$1/200 + 1/300 + 1/400 + \dots = 1/100$ ($1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$) pourra atteindre 1. La réponse est positive puisque le second facteur correspond à une somme partielle de la série harmonique, qui, comme nous l'avons vu plus haut, diverge.



MATHÉMATIQUES RÉCRÉATIVES

Au lycée de l'Espace

Démontrons que pour tout $n > 1$, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

$$\text{En effet, } 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{De même, } 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Si l'on désigne par S la somme cherchée, on a donc :

$$\begin{aligned} 1 + 2[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{1003003} - \sqrt{1003002})] &< S \\ &< 1 + 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{1003002} - \sqrt{1003001})], \end{aligned}$$

d'où, en simplifiant : $1 + 2(\sqrt{1003003} - \sqrt{2}) < S < 1 + 2(\sqrt{1003002} - 1)$.

On en déduit : $2001,17 < S < 2001,9998$.

Le code d'accès à la fusée est donc 2001.

Un code radical

$$\text{Posons } S = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2003} + \sqrt{2005}}.$$

$$\text{On a } S - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{15}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}} < S.$$

$$\text{D'où } 2S - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}} < 2S.$$

Le membre central de cette double inégalité peut s'écrire :

$$5 - 3\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 9 - 7\sqrt{2} + \dots + 2007 - 2005\sqrt{2} = 2007 - 3\sqrt{2}$$

On en déduit : $21,53 < 2S < 21,79$, d'où $10,76 < S < 10,90$.

Le code cherché est donc égal à 10.