

## énoncé 2

Soit  $ABC$  un triangle,  $M$  et  $N$  deux points du plan,  $M_A, M_B, M_C$  les projections de  $M$  sur  $(BC), (CA), (AB)$  respectivement, et  $N_A, N_B, N_C$  les projections de  $N$  sur ces mêmes droites. A quelle condition les six points  $M_A, M_B, M_C$  et  $N_A, N_B, N_C$  sont-ils sur un même cercle  $(\Gamma)$  ?

### Solution

Supposons que ces six points sont sur un même cercle  $(\Gamma)$  : soit  $O$  le centre de  $(\Gamma)$  et  $O_A, O_B, O_C$  les projections de  $O$  sur  $(BC), (CA), (AB)$ .  $(OO_A)$  est la médiatrice de la corde  $[M_A N_A]$  : les droites  $(MM_A), (OO_A), (NN_A)$ , parallèles et découpant sur  $(M_A N_A)$  deux segments égaux, découpent sur  $(MN)$  deux segments égaux, donc  $(OO_A)$  passe par le milieu de  $[MN]$ , et pour la même raison  $(OO_B)$  et  $(OO_C)$  passent elles aussi par le milieu de  $[MN]$ , ce qui prouve que  $O$  est le milieu de  $[MN]$ . Réciproquement,  $M$  étant donné, soit  $O$  le centre du cercle  $(\Gamma)$  circonscrit à  $M_A M_B M_C$  et  $N$  le symétrique de  $M$  par rapport à  $O$ .  $(MM_A), (OO_A)$  et  $(NN_A)$  découpent sur  $(MN)$  deux segments égaux,  $(OO_A)$  est la médiatrice de  $[M_A N_A]$  donc  $OM_A = ON_A$  :  $N_A$  appartient à  $(\Gamma)$  et, pour la même raison,  $N_B$  et  $N_C$  également. A tout point  $M$  correspond donc un et un seul point  $N$  tel que les six projetés soient sur un même cercle  $(\Gamma)$ , le centre de ce cercle étant le milieu de  $[MN]$ .

Par ailleurs, appelons  $A, B, C$  les trois angles du triangle,  $\theta = CBM$  (donc  $B-\theta = MBA$ ) et  $\phi = NBA$  (donc  $B-\phi = CBN$ ). La puissance de  $B$  par rapport à  $(\Gamma)$  vaut :  $BM_A \cdot BN_A = BM_C \cdot BN_C$ , soit :  $(BM \cdot \cos \theta)(BN \cdot \cos(B-\phi)) = (BM \cdot \cos(B-\theta))(BN \cdot \cos \phi)$ , d'où l'on déduit :  $\cos(B-\phi+\theta) + \cos(B-\phi-\theta) = \cos(B-\theta+\phi) + \cos(B-\theta-\phi)$ . Dans la mesure où  $0 < B < \pi$ , il en résulte que  $\theta = \phi$ , soit  $CBM = NBA$ . Pour la même raison,  $BAM = NAC$  et  $ACM = NCB$ . Deux points vérifiant ces trois propriétés sont dits isogonaux : la condition nécessaire et suffisante pour que les projetés de  $M$  et  $N$  sur les côtés du triangle  $ABC$  soient cocycliques est donc que  $M$  et  $N$  soient isogonaux par rapport au triangle  $ABC$ .

Deux cas particuliers importants : si  $M$  est l'orthocentre  $H$  du triangle, son isogonal est le centre  $O$  du cercle circonscrit, et le cercle passant par les six projetés est le cercle d'Euler du triangle, de centre le milieu  $O'$  de  $OH$ . Si  $M$  est sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , ses projetés sont sur la droite de Simson de  $M$ , et son isogonal est le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite de Simson.